آلا با فراهم کردن امکان تحصیل رایگان

و با کیفیت، افراد را قادر می سازد تا

زندگی خود، خانواده و جامعه ای که

در آن زندگی می کنند را بهبود بخشند.

SanatiSharif.ir

دانلود فیلم‌های آموزشی

(ریاضی، تجربی، انسانی)

به همراه جزوه، تست و آزمون با سطح های مختلف

مشاوره تحصیلی - کاملا تخصصی

همایش های انتخاب رشته و جمع بندی های کنکوری

صفر تا صد امتحان نهایی و کنکور

برنامه های اندرویدی متنوع

ریاضیـــات پایـــه

فصل اول

تصاعد حسابی و تصاعد هندسی

تعریف تصاعد حسابی (عددی)

عدد ثابت a_1 و عدد ثابت $d \neq 0$ را در نظر می گیریم و دنباله ای می سازیم که جملهٔ اول آن a_1 و جمله های بعدی هر یک از اضافه کردن d به جمله ماقبل بدست می آید. به این دنباله تصاعد حسابی گویند.

فرم عمـــومی دنباله های عددی

فرم عمومی دنبالهٔ $a_1 \quad , \quad a_2 \quad , \quad a_3 \quad , \quad a_4 \quad , \quad .... \quad , \quad a_n \quad , \quad ....$

فرم ویژه دنباله $a_1 \quad , \quad a_1+d \quad , \quad a_1+2d \quad , \quad a_1+3d \quad , \quad .... \quad , a_1+(n-1)d, ...$

برای محاسبهٔ a_n یا همان جملهٔ عمومی گوئیم: ضریب d، یک واحد از شماره a_n (شماره جمله) کمتر است.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

۱- دنباله ...,۱۵,۱۱,۷,۳مفروض است.

اولاً: ثابت کنیدبه تصاعد حسابی است؟ ثانیاً: فرم جملهٔ عمومی را بیابید؟ ثالثاً: جمله دهم این تصاعد را بیابید؟

نکتـــه	همیشه ضریب n که در فرمول جمله عمومی می آید، همان d است

۲- آیا می توانید رابطه ای بین فرمول جملهٔ n اُم یک تصاعد و فرمول خط راست پیدا کنید .

خـواص تصاعـد حسابـی

۱- در هر تصاعد حسابی، تفاضل دو جمله متوالی عدد ثابت است:

$$\forall n \in N : a_n - a_{n-1} = d$$

۲- b واسطه حسابی c,a است، اگر سه عدد c,b,a به تصاعد حسابی باشند.

$$b = \frac{a+c}{2}$$ (شرط به تصاعد حسابی بودن c,b,a)

صادق ثابتی AWAT

09121972044

۳- سه جملهٔ متوالی تصاعد حسابی را به روشهای زیر می توانید نشان دهید :

الف) $a , a+d , a+۲d$ ب) $a-d , a , a+d$ ج) $a , b , c \ : ۲b=a+c$

۳- مجموع ۳ عدد که تصاعد حسابی تشکیل می دهند ۱۲ و مجموع مربعات آنها ٦٦ است. قدر نسبت را بیابید؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ± ۳ ٤) ٤

٤- اگر اضلاع یک مثلث قائم الزاویه به تصاعد حسابی باشند نسبت وتر به ضلع کوچکتر کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ٤) $\frac{۴}{۳}$

٤- درج واسطه های حسابی بین دو عدد a , b:

اگر a , b دو عدد مفروض باشند، می توان m عدد بین a , b پیدا کرد. که با این دو عدد تشکیل تصاعد عددی دهند. به این m عدد واسطه های حسابی بین a , b گویند.

$$a , \overbrace{\bigcirc , \bigcirc , \bigcirc , \dots , \bigcirc}^{m} , b$$

فرمول پیدا کردن درج m واسطه حسابی بین دو عدد a , b:

$$b=a+(m+۲-۱)d \quad \Rightarrow \quad \boxed{d=\frac{b-a}{m+۱}}$$

۵- رابطهٔ بین جمله nام و جملهٔ mام از یک تصاعد حسابی:

اگر a_n , a_m به ترتیب جمله های nام و mام یک تصاعد عددی معلوم باشند، داریم:

$$\begin{cases} a_n=a_۱+(n-۱)d \\ a_m=a_۱+(m-۱)d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_n-a_m=(n-m)d \quad \Rightarrow \quad \boxed{d=\frac{a_n-a_m}{n-m}}$$

حواستان باشدکه در۵ رابطه بالادائماً به دنبال d , $a_۱$ بودیم.چون تمام چیزهای یک تصاعدبا بودن $a_۱,d$ قابل دسترسی میباشند.

۵- جملهٔ اول و هفتم تصاعد عددی ۱۱ و ۳۵ است بین اعداد ۳۸ و ۱۳ چند واسطهٔ عددی درج کنیم تا جملهٔ چهارم دو تصاعد برابر شوند؟

۱) ٤ ۲) ۳ ۳) ۵ ٤) ٦

٦- رابطه بین جملات و اندیس ها در تصاعد عددی

$$\boxed{r+s=n+m \quad \Leftrightarrow \quad a_r+a_s=a_n+a_m}$$

اگر به اثبات رابطهٔ فوق فکر کنید، به نتایج خوبی خواهید رسید.

مثلاً اینکه این رابطه محدودیت ندارد وبه شرح زیر می تواند متنوع بیان شود.

الف:

$$\boxed{r+s+p=n+m+k \quad \Leftrightarrow \quad a_r+a_s+a_p=a_n+a_m+a_k}$$

د یا ب :

$r+s=۲n$ باشد پس $a_r+a_s=۲a_n$

$r+s+k=۳n$ باشد آنگاه $a_r+a_s+a_k=۳a_n$

و یا ج :

تذکـــر

فرض کنید $r+s=m$ باشد، آیا $a_r+a_s=a_m$ است؟

خیر، زیرا اگر جملات باز شوند از طرفین تساوی a_1 حذف نمی شود.

برای درک مطلب به نمونهٔ زیر دقت نمائید.

۶- اگر $r+s=2n$ باشد ثابت کنید $a_r+a_s=2a_n$

۷- اگر $r+s=n$ باشد، در چه صورت $a_r+a_s=a_n$

۸- در یک تصاعد حسابی مجموع جمله های چهارم و هشتم برابر ۱۴ است مجموع جمله های پنجم, ششم و هفتم کدام است ؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

خاصیت عجیب تصاعدهای عددی

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ \dots \ , \ a_{n-2} \ , \ a_{n-1} \ , \ a_n$$

در تصاعد فوق با n جمله (a_1 با a_n) و (a_2 با a_{n-1}) و (a_3 با a_{n-2}) متساوی الفاصله از طرفین هستند و به راحتی می توان ثابت کرد:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\dots=2a_1+(n-1)d$$

تذکـــر

جملات متساوی الفاصله از طرفین وقتی n تا جمله (تعداد عدد n) زوج باشد به مشکلی برخورد نمی کند.

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$$

$$a_1+a_6=a_2+a_5=a_3+a_4$$

همچنین زمانیکه n یعنی تعداد جملات فرد باشد، جمله وسط تنها می ماند که با خودش متساوی الفاصله محسوب می گردد.

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7$$

$$a_1+a_7=a_2+a_6=a_3+a_5=\underbrace{a_4+a_4}_{2a_4}$$

۹- اگر تصاعدی ۱۹ جمله داشته باشد شمارهٔ جملهٔ وسط چیست ؟

تذکـــر

فرض کنید a_r , a_s را داده اند که دو جمله از تصاعد n جمله ای می باشند. حال آیا متساوی الفاصله هستند یا خیر؟

$a_1 , a_2 , ... , a_r , ... , a_s , ... , a_n$

شرط آنکه a_r , a_s از دنباله n جمله ای، دو جملهٔ متساوی الفاصله از طرفین باشند این است که:

$$r+s=n+1$$

۱۰- مجموع n جملهٔ یک تصاعد را به کمک این خاصیت عجیب بدست آورید .

۷- مجموع n جملهٔ اول:

$$\begin{cases} a_1 = s_1 \\ a_1 + a_2 = s_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = s_3 \\ \vdots \\ a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = S_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{S_n - S_{n-1} = a_n} \qquad (۱-۷)$$

برای آنکه S_n را بدست آوریم دو فرمول زیر گره گشا هستند.

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_2 + a_{n-1}) = ... = \frac{n}{2}(a_r + a_s) \end{cases} \qquad \boxed{: r+s=n+1} \qquad (۲-۷)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]} \qquad (۳-۷)$$

اینک به جای a_n جمله عمومی $a_1 + (n-1)d$ را قرار می دهیم و به فرمول دوم می رسیم.

و با باز کردن فرمول دوم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - d)n$$

پس فرمول جملهٔ عمومی جملات $a_n = A'n + B'$ و مجموع جملات $S_n = An^2 + B$ و $A = \frac{d}{2}$, $A' = d$.

۱۱- در تصاعد عددی با جملهٔ اول a اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود آنگاه بـه مجمـوع ۲۰ جملـهٔ اول چقدر افزوده خواهد شد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۱۲- جملهٔ دهم یک تصاعد حسابی ۳۹ و مجموع هشت جملهٔ اول آن ۱۳۶ است جملهٔ شانزدهم آن کدام است ؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۴ ۳) ۶۳ ۴) ۶۵

۱۳- در یک تصاعد عددی $S_{20}=610$ و $S_{10}=155$ قدر نسبت کدام است؟

دنبالـــه هندســـی

فرم عمومی دنباله های هندسی

عدد ثابت $a_1 \neq 0$ و عدد ثابت r $(r \neq 0 , \pm 1)$ را در نظر می گیریم و دنباله ای میسازیم که جملهٔ اول a_1 و جمله های بعدی هر یک از ضرب r در جمله ماقبل آن بدست آید. چنین دنباله ای را: تصاعد هندسی گوئیم.

فرم عمومی: $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \dots , a_n , \dots$

فرم ویژه: $a_1 , a_1r , a_1r^2 , a_1r^3 , \dots , a_1r^{n-1} , \dots$

برای محاسبه a_n یا همان جمله عمومی گوئیم: توان r، یک واحد از شماره جمله یا همان a_n کمتر است.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

۱۴- دنبالهٔ $1,3,9,27,\dots$ مفروض است، اولاً ثابت کنید به تصاعد هندسی است؟ ثانیاً فرم جملهٔ عمومی را بیابید؟ ثالثاً جملهٔ دهم را بیابید.

خواص تصاعد هندسی

۱- در هر تصاعد هندسی، تقسیم دو جملهٔ متوالی عددی ثابت است.

$$\forall n \in N \quad : \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_2}{a_1} = r$$

۲- b واسطه هندسی c, a است، اگر سه عدد c , b , a به تصاعد حسابی باشند.

$$b^2 = ac$$

۳- نمایش سه جملهٔ متوالی تصاعد هندسی به یکی از فرمهای زیر است .

الف) a , ar , ar^2

ب) $\frac{a}{r} , a , ar$

ج) $a , b , c : b^2 = ac$

۱۵- اگر اضلاع یک مثلث قائم الزاویه به تصاعد هندسی باشند r چیست ؟

٤- درج واسطه های هندسی بین دو عدد a , b:

اگر a, b دو عدد مفروض باشند، می توان k عدد بین a , b پیدا کرد. که با این دو عدد تشکیل تصاعد هندسی دهند. به این k عدد واسطه های هندسی بین a , b گویند.

$$a , \overbrace{\bigcirc , \bigcirc , \bigcirc , \dots , \bigcirc}^{k} , b \quad \Rightarrow \quad b = ar^{k+۲-۱} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r^{k+۱} = \frac{b}{a}}$$

۱٦- بین جملهٔ ۱۱ اُم و جملهٔ ۱۳ اُم تصاعد هندسی به شرح (.....و ۱۰ و ۲) سه واسطهٔ هندسی درج کرده ایم تا تصاعد جدیدی بین این ۵ عدد حاصل شود قدر نسبت تصاعد جدید کدام است ؟

۱) $\pm\sqrt{۵}$ ۲) $\pm ۲\sqrt{۵}$ ۳) $\pm\sqrt{۲}$ ٤) $\pm\sqrt{۱۰}$

۵- رابطهٔ بین جمله n ام و جملهٔ kام از یک تصاعد هندسی معلوم باشند داریم:

$$\begin{cases} a_n = a_۱ r^{n-۱} \\ a_m = a_۱ r^{m-۱} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_m} = r^{n-m}$$

٦- رابطه بین جملات و اندیس ها در تصاعد هندسی:

$$\boxed{r+s=n+m \quad \Leftrightarrow \quad a_r . a_s = a_n . a_m}$$

موارد زیر را نیز در هندسی داریم: (همانند حسابی)

$$\boxed{\begin{array}{lcl} r+s+p=n+m+k & \Leftrightarrow & a_r . a_s . a_p = a_n . a_m . a_k \\ r+s=۲n & \Leftrightarrow & a_r . a_s = a_n^{۲} \\ r+s+k=۳m & \Leftrightarrow & a_r . a_s . a_k = a_m^{۳} \end{array}}$$

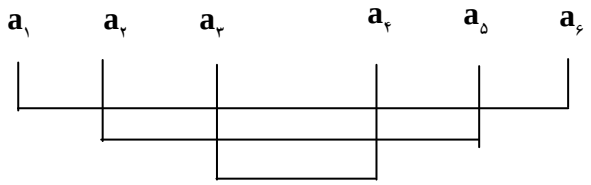
۱۷- آیا می توانید رابطه ای بین فرمولهای تصاعد هندسی و حسابی نظیر به نظیر پیدا کنید ؟

۷- جملات متساوی الفاصله از طرفین :

$$a_۱ \text{ و } a_۲ \text{ و } a_۳ \text{ و.....و } a_{n-۲} \text{ و } a_{n-۱} \text{ و } a_n$$

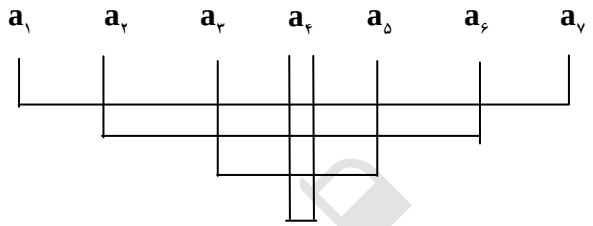
$$\boxed{a_۱ . a_n = a_۲ . a_{n-۱} = a_۳ . a_{n-۲} = \dots\dots = a_۱^{۲} . r^{n-۱}}$$

تذکـر | وقتی n زوج باشد مشکلی نیست.



$$a_1.a_6 = a_2.a_5 = a_3.a_4$$

وقتی n فرد باشد جمله وسط با خودش متساوی الفاصله از طرفین است.



$$a_1.a_7 = a_2.a_6 = a_3.a_5 = a_4.a_4$$
$$a_4^2$$

۱۸- تصاعد هندسی $a , ar , ar^2 , ... , ar^{n-1}$ مفروض است اگر p_n حاصلضرب n جملهٔ متوالی با شروع از جملهٔ اول این تصاعد باشد حاصل p_n برحسب a , r چیست ؟

۸- مجموع n جمله اول:

- (۱-۸)

$$\begin{cases} a_1 = s_1 \\ a_1 + a_2 = s_2 \\ \vdots \\ a_1 + a_2 + ... + a_n = s_n \end{cases}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

حال قرار است حاصل S_n را بر حسب n , r , a پیدا کنیم. برگردید به توسعهٔ اتحادها آیا یادتان هست:

پس داریم:

$$S_n = a_1 + a_1 r + ... + a_1 r^{n-1} = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n n}{1-r}$$

$$S_m^n = S_1^n - S_1^{m-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} - \frac{a_1(1-r^{m-1})}{1-r} = S_m^n = \frac{a_1}{1-r}(r^{m-1} - r^n)$$

تذکر : اگر $|r| < 1$ باشد تصاعد هندسی نزولی نام دارد و $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

اگر $|r|>1$ باشد تصاعد هندسی صعودی نام دارد و $S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

نکتـــه

حال می خواهیم مجموع جملات یعنی (S_n را وقتیکه $n\to\infty$) محاسبه کنیم.

اگر $|r|\geq 1$ به تصاعد – تصاعد هندسی صعودی گوئیم و

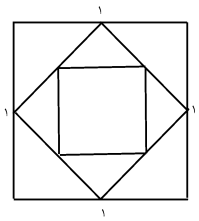
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$$

اگر $|r|<1$ به تصاعد – تصاعد هندسی نزولی گوئیم و

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-r}$$

آیا می توانید فرمول آخری را اثبات کنید؟

۱۹ - در شکل مقابل مجموع مساحت مربع های حاصل از ۱۰ مرحله تکرار شکل چیست؟



۲۰- رابطهٔ S_n و S_{2n} در تصاعد هندسی با قدر نسبت r چیست ؟

۲۱- حاصل $3+33+333+\cdots+\underbrace{33\cdots3}_{n\text{ رقم}}$ چیست؟

۲۲- در یک تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت r, مجموع ۱۰ جمله , برابر مجموع ۱۱امین جمله تا بینهایت است. قدر نسبت این تصاعد چیست ؟

۲۳- یک توپ که از ارتفاع a متری به زمین می خورد r مترِ قبل بالا می آید , پس از ۱۰ بار رفت و برگشت چقدر مسیر طی می کند؟

۲٤- در یک تصاعد هندسی اولین , سومین وپنجمین جمله را جملات اول , چهارم و ششم یک تصاعد حسابی گوئیم.هرگاه جمله اول تصاعد حسابی ۵ باشد , چهارمین جملهٔ تصاعد حسابی کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ٤) $\frac{1}{5}$